

# Minimizzazione degli stati di reti sequenziali asincrone (RSA) / sincrone (RSS)

Problema:

Data una tabella di flusso (TdF) contraddistinta da un numero arbitrario  $N$  di stati  $s_1, s_2, \dots, s_N$ , individuare la (o una) TdF ad essa equivalente contraddistinta dal minimo numero possibile  $n$  di stati  $s'_1, s'_2, \dots, s'_n$  (TdF minima).

1° caso (tipicamente RSS):

TdF originaria completamente specificata

Algoritmo di riduzione basato sulla relazione di indistinguibilità tra stati

TdF minima unica

2° caso (tipicamente RSA):

TdF originaria non completamente specificata

Algoritmo di riduzione basato sulla relazione di compatibilità tra stati

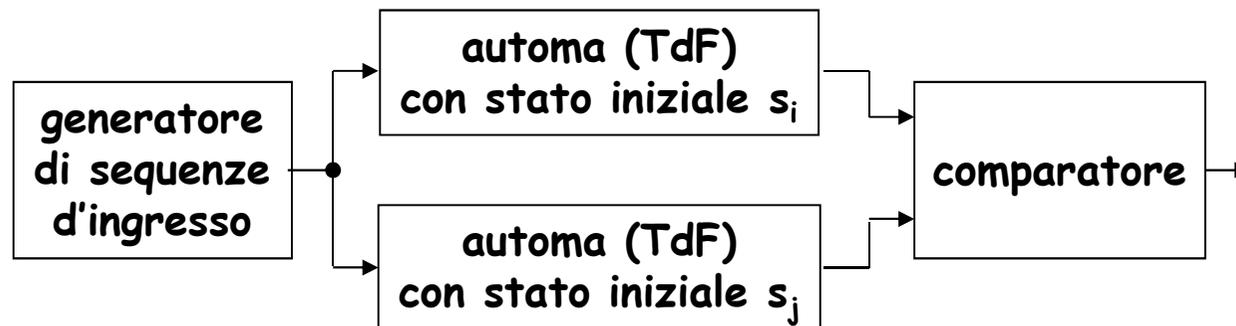
TdF minima in generale non unica

1° caso (TdF completamente specificata → relazione di indistinguibilità)

Due stati  $s_i, s_j$  sono indistinguibili ( $s_i \equiv s_j$ ) se

1ª definizione

assunti come stati iniziali, danno luogo a sequenze di configurazioni d'uscita identiche per qualunque sequenza di configurazioni d'ingresso



2ª definizione

per qualunque configurazione di ingresso  $\gamma$

1) le corrispondenti configurazioni di uscita coincidono

$$F(s_i, \gamma) = F(s_j, \gamma)$$

2) gli stati futuri corrispondenti sono indistinguibili

$$G(s_i, \gamma) \equiv G(s_j, \gamma)$$

La relazione di indistinguibilità è una relazione di equivalenza, valendo per essa le proprietà

a) riflessiva:  $s_i \equiv s_i$

b) simmetrica:  $s_i \equiv s_j \rightarrow s_j \equiv s_i$

c) transitiva:  $s_i \equiv s_j, s_j \equiv s_k \rightarrow s_i \equiv s_k$

La relazione di indistinguibilità induce sull'insieme degli stati di TdF una partizione in sottoinsiemi disgiunti (classi di indistinguibilità).

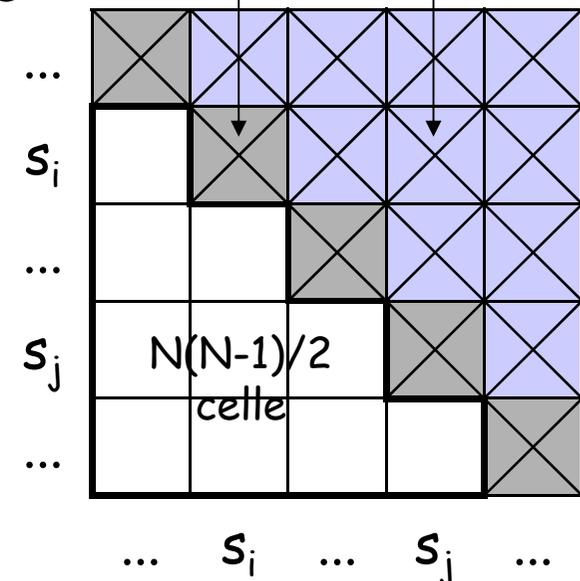
La TdF minima ha tante stati (righe) quante sono le classi di indistinguibilità.

Algoritmo di riduzione:

Individuazione delle coppie di stati indistinguibili (2ª definizione)

Individuazione delle classi di indistinguibilità

Costruzione della TdF minima



2° caso (TdF non completamente specificata → relazione di compatibilità)

Due stati  $s_i, s_j$  sono compatibili ( $s_i \sim s_j$ ) se

1ª definizione

assunti come stati iniziali, danno luogo a sequenze di configurazioni d'uscita identiche, a meno di condizioni di indifferenza, per qualunque sequenza di configurazioni d'ingresso

2ª definizione

per qualunque configurazione di ingresso  $\gamma$

1) le corrispondenti configurazioni di uscita, se entrambe specificate, coincidono

$$F(s_i, \gamma) = F(s_j, \gamma)$$

2) i corrispondenti stati futuri, se entrambi specificati, sono compatibili

$$G(s_i, \gamma) \sim G(s_j, \gamma)$$

La relazione di compatibilità non è una relazione di equivalenza, poiché per essa non vale la proprietà transitiva

a) riflessiva:  $s_i \sim s_i$

b) simmetrica:  $s_i \sim s_j \rightarrow s_j \sim s_i$

c) transitiva:  $s_i \sim s_j, s_j \sim s_k \nrightarrow s_i \sim s_k$

Le classi massime di compatibilità (sottoinsiemi di stati di TdF a due a due compatibili) non sono necessariamente disgiunte.

Algoritmo di riduzione:

Individuazione delle coppie di stati compatibili (2<sup>a</sup> definizione)

Individuazione delle classi massime di compatibilità

Selezione dell'insieme  $S$  di minima cardinalità di classi di compatibilità, non necessariamente massime, tali da soddisfare le condizioni di

- copertura: l'unione delle classi in  $S$  comprende tutti gli stati di TdF
- chiusura: per ogni ingresso, gli stati futuri corrispondenti agli stati di ogni classe in  $S$  appartengono tutti ad una classe in  $S$

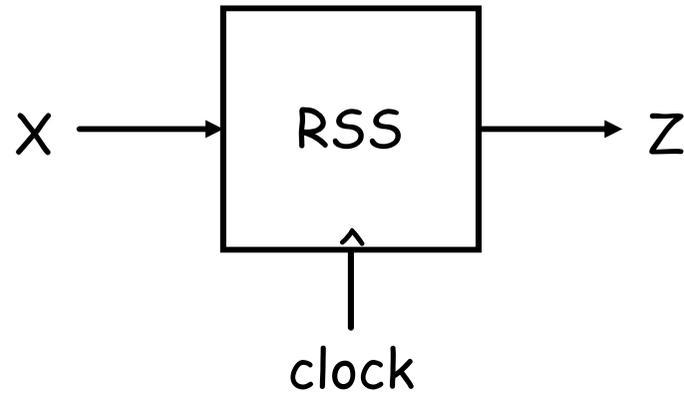
Il numero  $n$  di classi di compatibilità in  $S$  è compreso nel range  $(n_{\min}, n_{\max}]$ , essendo  $n_{\min}$  la cardinalità della più ampia classe massima di incompatibilità e  $n_{\max}$  il numero delle classi massime di compatibilità

Costruzione della tabella di flusso minima avente  $n$  stati (righe)

N.B. - TdF non completamente specificate  
a causa di vincoli su sequenze d'ingresso di lunghezza due:

l'insieme di minima cardinalità di classi massime di compatibilità che soddisfa la condizione di copertura, soddisfa anche la condizione di chiusura (Teorema di Unger).

Il teorema di Unger assume particolare rilievo nel caso di RSA, dal momento che le indifferenze presenti nelle TdF di tali reti derivano tipicamente dall'ipotesi che i segnali di ingresso possono cambiare di valore uno solo alla volta (ovvero da sequenze di ingresso di lunghezza due inammissibili).



Comportamento:

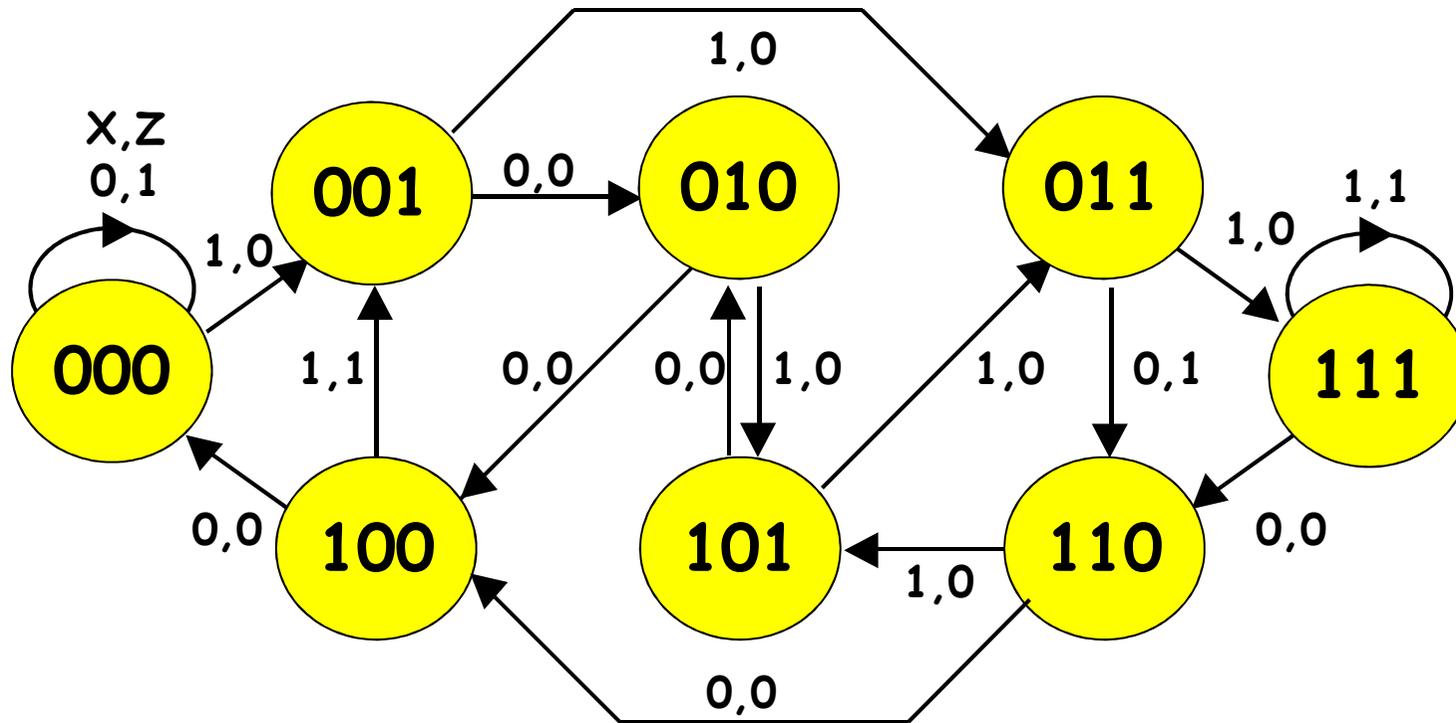
in ogni intervallo di clock l'uscita Z deve assumere il valore logico 1 soltanto se gli ultimi quattro valori di X costituiscono una palindrome.

X	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	...
Z				1	0	0	0	1	0	0	1	1	...

# Diagramma degli stati (modello di Mealy)

Occorre prevedere 8 distinti stati, ciascuno dei quali identifica una ben precisa configurazione dei valori assunti da X nei tre precedenti intervalli di clock.

Denotando gli stati direttamente con tali configurazioni binarie ed assumendo che in esse i bit siano ordinati in modo tale che l'ultimo a destra si riferisca all'ultimo valore assunto da X, è immediato costruire il diagramma degli stati:



# Tabella di flusso

	X	
	0	1
0	0,1	1,0
1	2,0	3,0
2	4,0	5,0
3	6,1	7,0
4	0,0	1,1
5	2,0	3,0
6	4,0	5,0
7	6,0	7,1

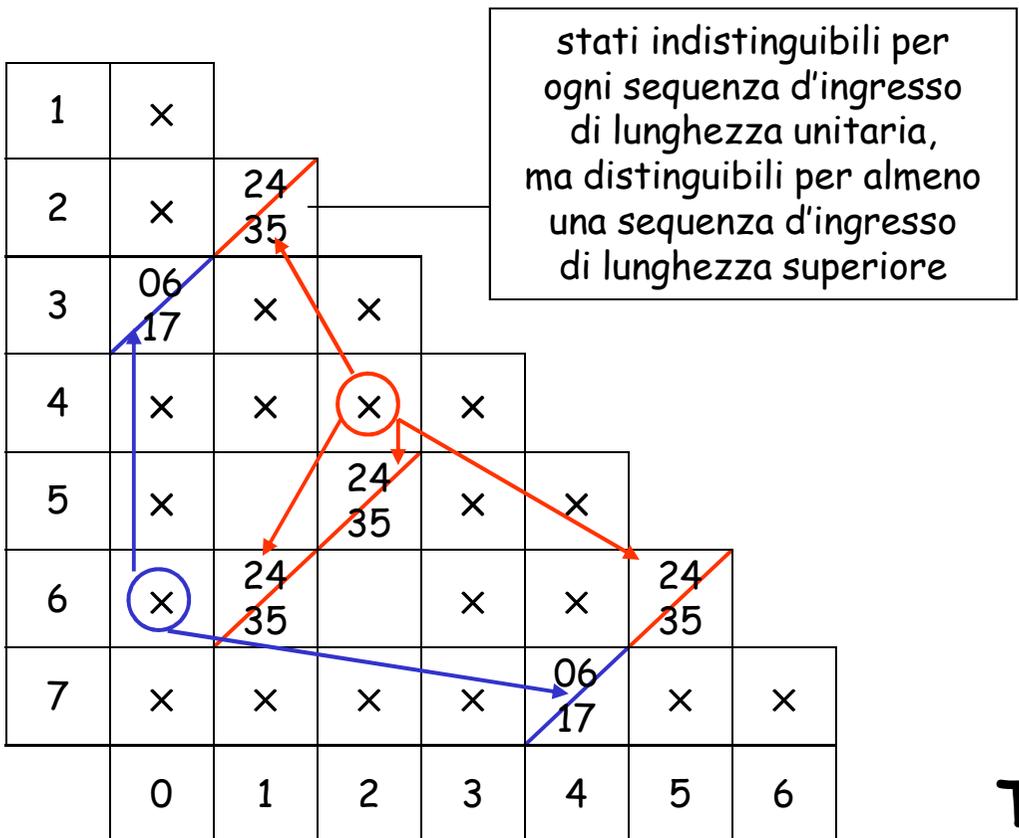
# Tabella triangolare

1	x						
2	x	24 35					
3	06 17	x	x				
4	x	x	x	x			
5	x		24 35	x	x		
6	x	24 35		x	x	24 35	
7	x	x	x	x	06 17	x	x
	0	1	2	3	4	5	6

stati distinguibili per almeno una configurazione d'ingresso

stati indistinguibili per ogni configurazione d'ingresso, ma condizionatamente indistinguibili per sequenze d'ingresso di lunghezza non unitaria

stati indistinguibili per qualunque sequenza d'ingresso



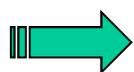
X

	0	1
0	0,1	1,0
1	2,0	3,0
2	4,0	5,0
3	6,1	7,0
4	0,0	1,1
5	2,0	3,0
6	4,0	5,0
7	6,0	7,1

**Classi di indistinguibilità:**

- {2,6}, {1,5}
- {0}, {3}, {4}, {7}

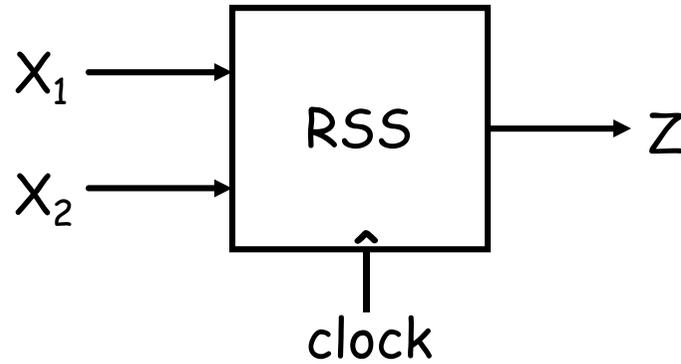
**N=8** → **n=6**



**Tabella di flusso minima**

X

	0	1
0	0,1	1,0
{1,5}	1	2,0
{2,6}	2	4,0
3	2,1	7,0
4	0,0	1,1
7	2,0	7,1



## Comportamento (tabella di flusso)

		$X_1X_2$			
		00	01	11	10
s.p.	1	2,0	-, -	3, -	2,0
	2	3,0	5,1	2,0	-, -
	3	3,0	4,1	-, -	5,0
	4	-, -	1,1	2, -	-, -
	5	-, -	-, -	1,1	-, -
		s.f., Z			

## Tabella triangolare

2	23				
3	<del>23</del> 25	45			
4	23	<del>15</del>	14		
5	<del>13</del>	×		12	
	1	2	3	4	

Classi massime di **compatibilità** / **incompatibilità**

{1,2} {1,4} {2,3} {3,4,5} / {1,3} {1,5} {2,4} {2,5}

		$X_1X_2$			
		00	01	11	10
s.p.	1	2,0	-, -	3, -	2,0
	2	3,0	5,1	2,0	-, -
	3	3,0	4,1	-, -	5,0
	4	-, -	1,1	2, -	-, -
	5	-, -	-, -	1,1	-, -

s.f., Z

$a \equiv \{1,2\}$   
 $b \equiv \{3,4,5\}$   
 $c \equiv \{1,4\}$   
 $d \equiv \{2,3\}$

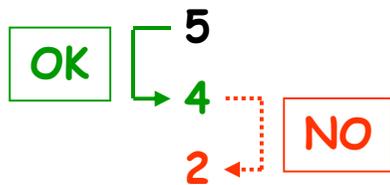


### Tabella di flusso ridotta

		$X_1X_2$			
		00	01	11	10
s.p.	a	d,0	b,1	d,0	a/d,0
	b	b/d,0	c,1	a,1	b,0
	c	a/d,0	a/c,1	d, -	a/d,0
	d	b/d,0	b,1	a/d,0	b,0

s.f., Z

condizione di chiusura



$a \equiv \{1,2\}$   
 $b \equiv \{3,4,5\}$   
 condizione di copertura



		$X_1X_2$			
		00	01	11	10
s.p.	a	?,0	b,1	?,0	a,0
	b	b,0	?,1	a,1	b,0

s.f., Z

condizione di chiusura



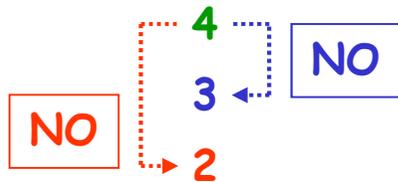
$X_1X_2$

	00	01	11	10
1	2,0	-, -	3, -	2,0
2	3,0	5,1	2,0	-, -
3	3,0	4,1	-, -	5,0
4	-, -	1,1	2, -	-, -
5	-, -	-, -	1,1	-, -

s.p.

s.f., Z

$a \equiv \{1,2\}$        $b \equiv \{3,4,5\}$   
 $c \equiv \{1,4\}$        $d \equiv \{2,3\}$



condizione di chiusura



s.p.

$X_1X_2$

	00	01	11	10
a	?,0	b,1	?,0	a,0
b	b,0	c,1	a,1	b,0
c	a,0	a/c,1	?, -	a,0

s.f., Z

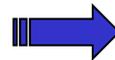


s.p.

$X_1X_2$

	00	01	11	10
a	d,0	b,1	d,0	a/d,0
b	b/d,0	?,1	a,1	b,0
d	b/d,0	b,1	a/d,0	b,0

s.f., Z



s.p.

$X_1X_2$

	00	01	11	10
b	b/d,0	c,1	?,0	b,0
c	d,0	c,1	d, -	d,0
d	b/d,0	b,1	d,0	b,0

s.f., Z

		$X_1X_2$			
		00	01	11	10
s.p.	1	2,0	-, -	3, -	2,0
	2	3,0	5,1	2,0	-, -
	3	3,0	4,1	-, -	5,0
	4	-, -	1,1	2, -	-, -
	5	-, -	-, -	1,1	-, -

s.f., Z

$a \equiv \{1,2\}$

$d \equiv \{2,3\}$

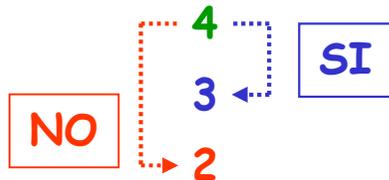
$e \equiv \{4,5\}$



## Tabella di flusso minima

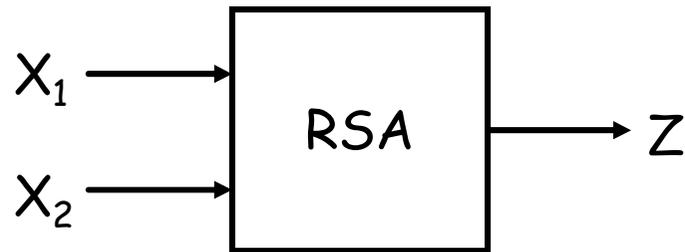
		$X_1X_2$			
		00	01	11	10
s.p.	a	d,0	e,1	d,0	a/d,0
	d	d,0	e,1	a/d,0	e,0
	e	-, -	a,1	a,1	-, -

s.f., Z



condizione di chiusura



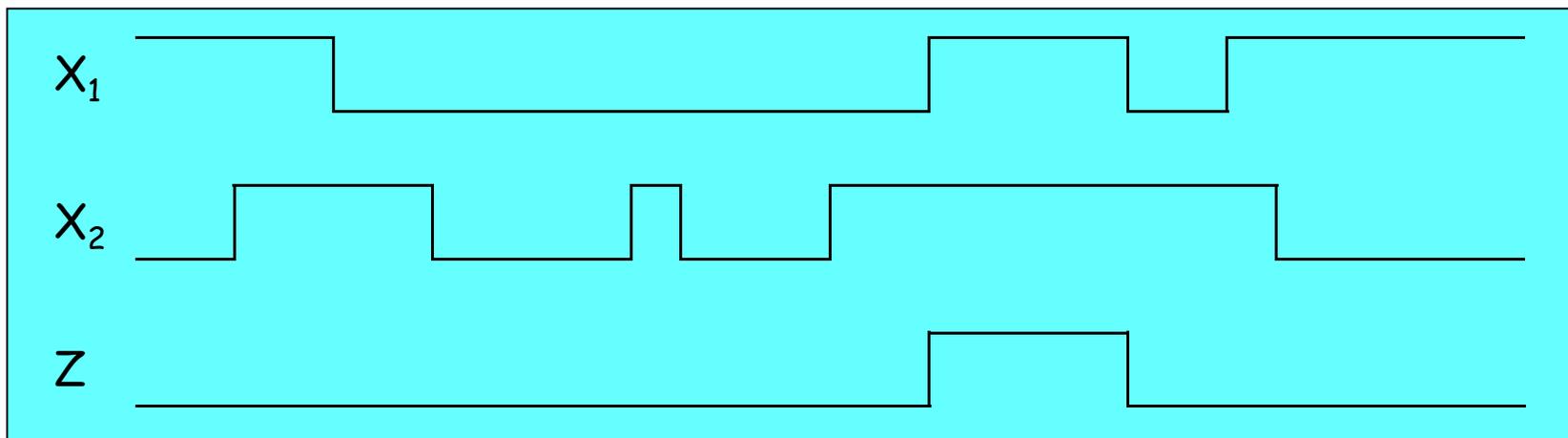


Comportamento:

$Z = 1$  in corrispondenza dell'ultimo simbolo della sequenza di ingresso

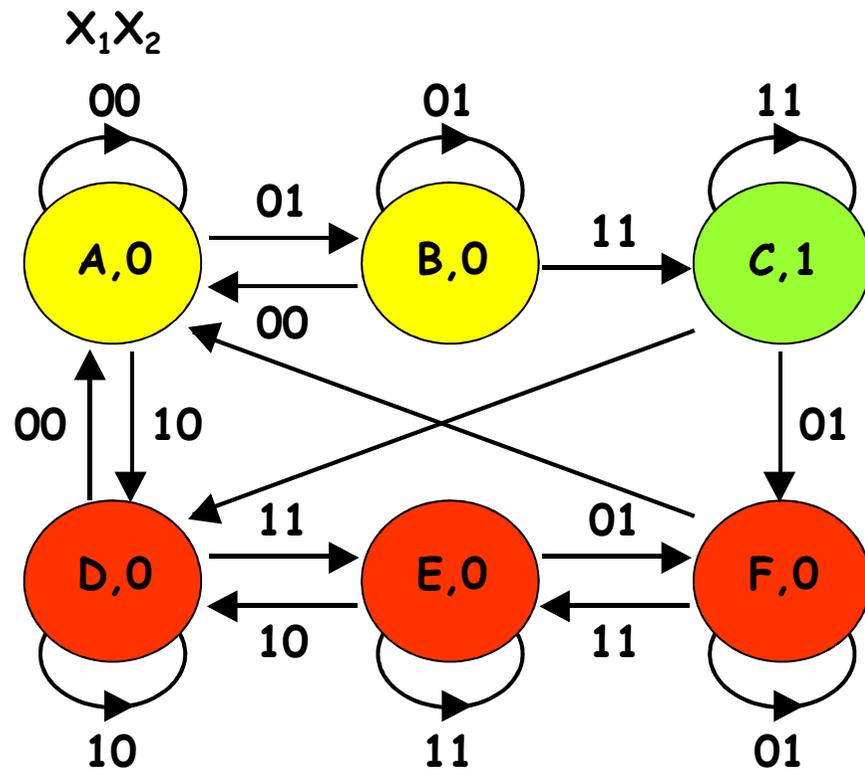
$X_1X_2 = 00-01-11$

(i segnali di ingresso non cambiano mai contemporaneamente).



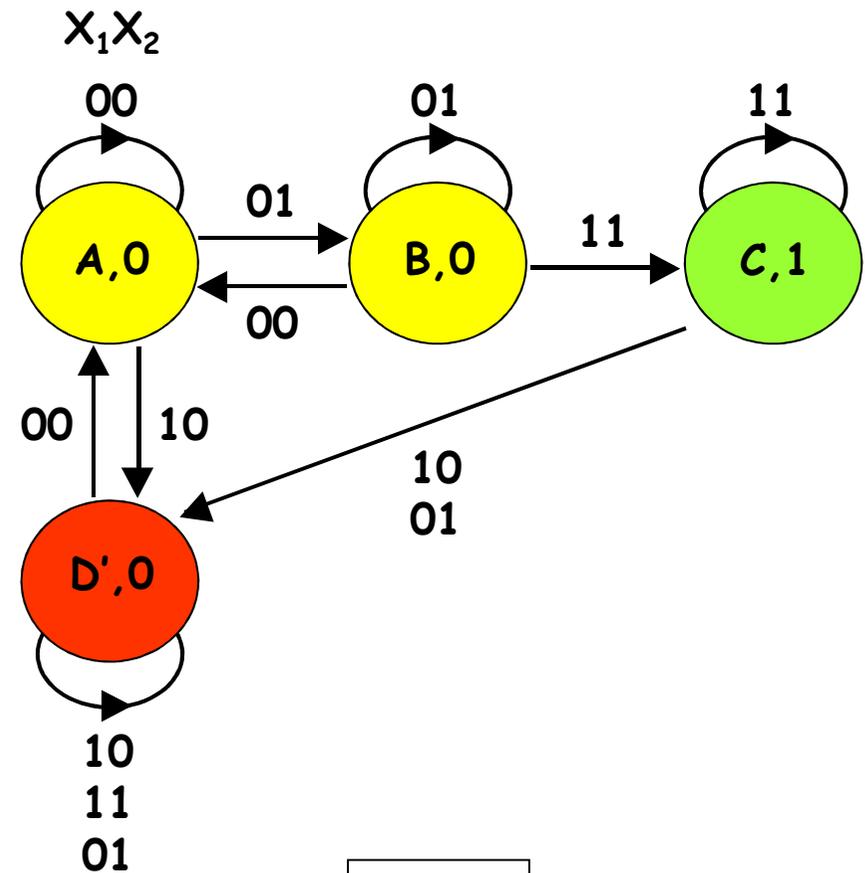
# Grafo degli stati (modello di Moore)

primitivo



6 stati

non primitivo



4 stati

# Tabella di flusso (modello di Mealy) e tabella triangolare

		$X_1X_2$			
		00	01	11	10
s.p.	A	A,0	B,0	-, -	D,0
	B	A,0	B,0	C,-	-, -
	C	-, -	F,-	C,1	D,-
	D	A,0	-, -	E,0	D,0
	E	-, -	F,0	E,0	D,0
	F	A,0	F,0	E,0	-, -
		s.f., Z			

B					
C	BF	BF			
D		CE	x		
E	BF	BF CE	x		
F	BF	CE	x		
	A	B	C	D	E

Classi massime di compatibilità: {A,B} {A,D} {C} {D,E,F}    6 → 4

Teorema di Unger: {A,B} ~~{A,D}~~ {C} {D,E,F}    4 → 3

condizione di copertura

condizione di chiusura



# Tabella di flusso minima

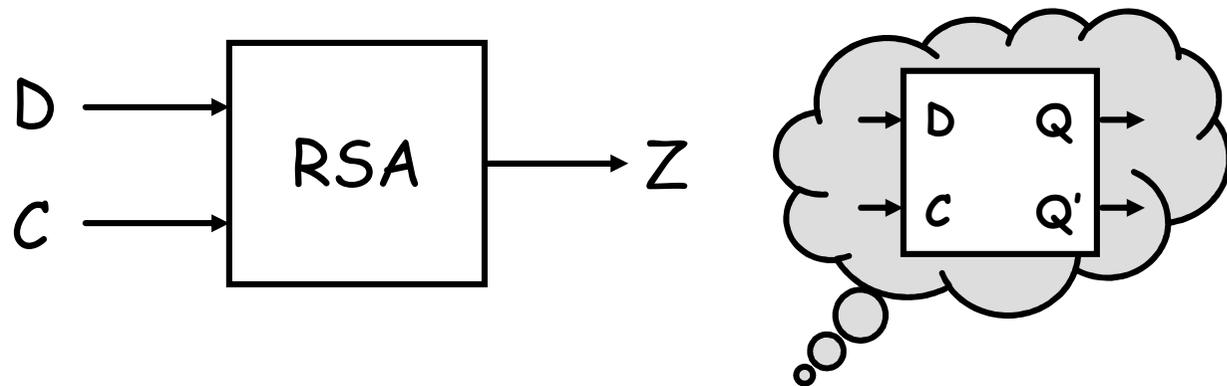
		$X_1X_2$			
		00	01	11	10
s.p.	A	A,0	B,0	-, -	D,0
	B	A,0	B,0	C,-	-, -
	C	-, -	F,-	C,1	D,-
	D	A,0	-, -	E,0	D,0
	E	-, -	F,0	E,0	D,0
	F	A,0	F,0	E,0	-, -

s.f., Z

$\alpha \equiv \{A,B\}$      $\beta \equiv \{C\}$      $\gamma \equiv \{D,E,F\}$

		$X_1X_2$			
		00	01	11	10
s.p.	$\alpha$	$\alpha,0$	$\alpha,0$	$\beta,-$	$\gamma,0$
	$\beta$	-, -	$\gamma,-$	$\beta,1$	$\gamma,-$
	$\gamma$	$\alpha,0$	$\gamma,0$	$\gamma,0$	$\gamma,0$

s.f., Z



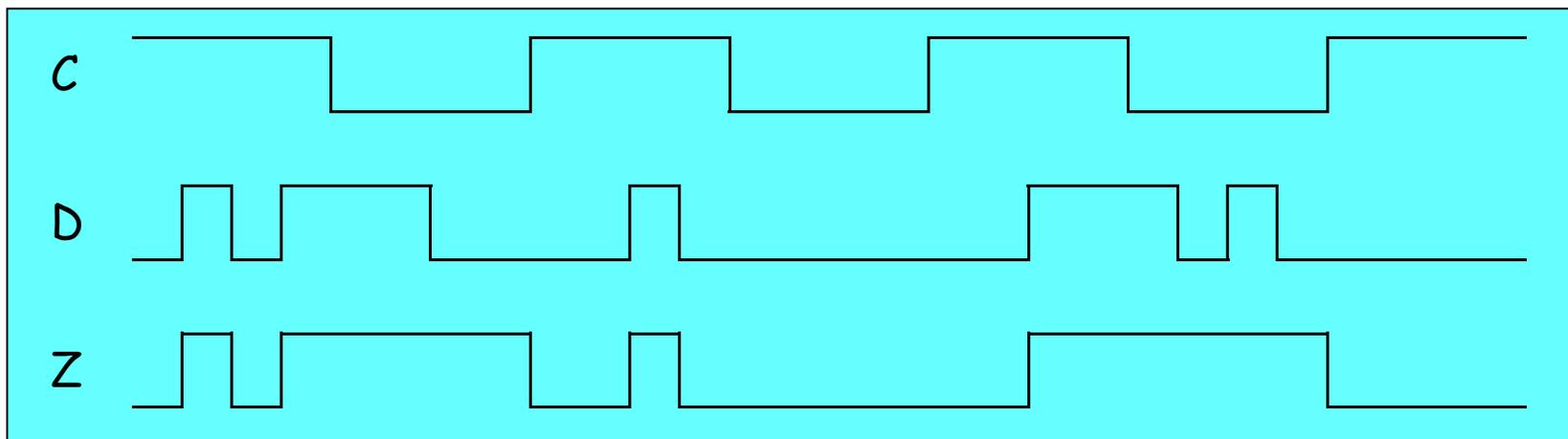
Comportamento:

$C$  svolge il ruolo di segnale di campionamento,  $D$  di segnale campionato.

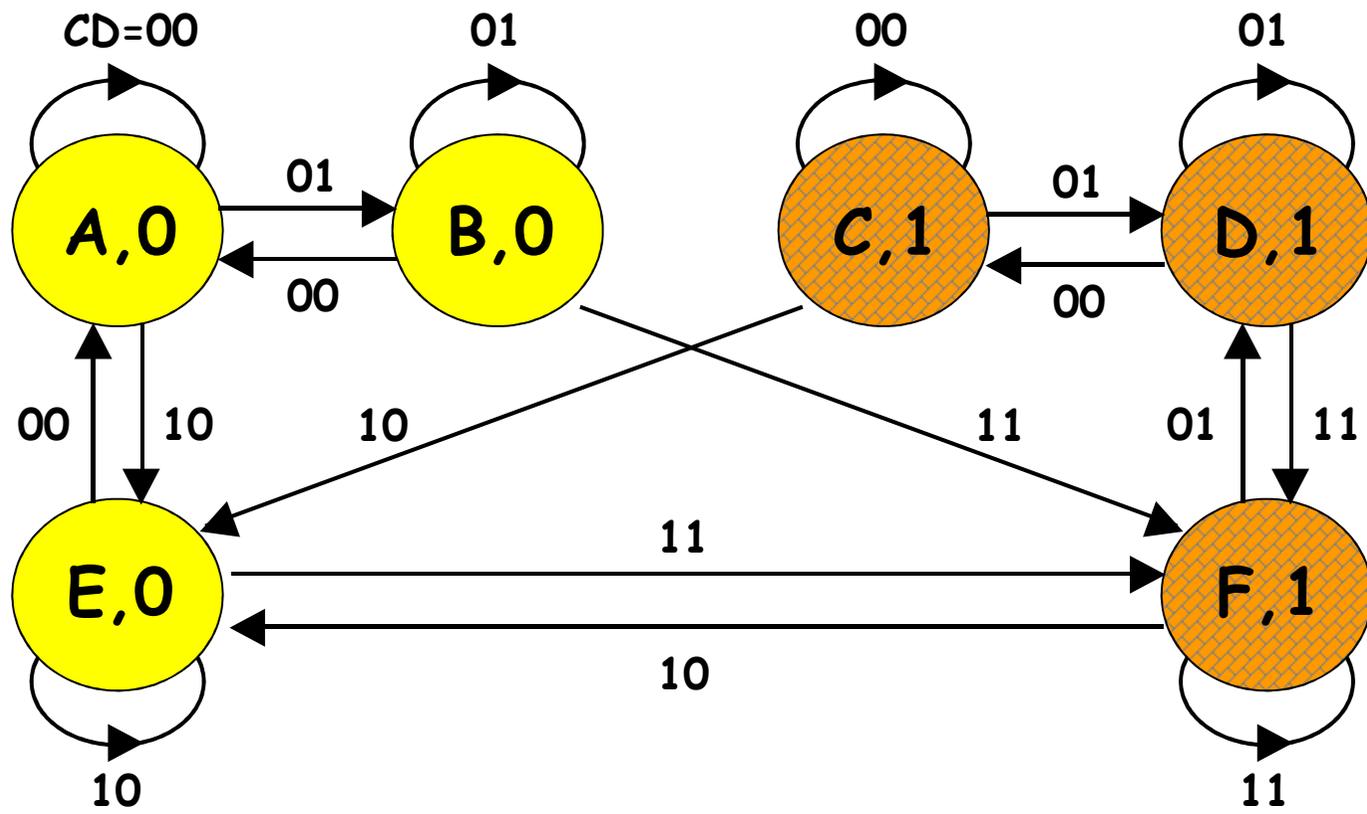
Il campionamento ha luogo allorché  $C=1$ .

$Z$  riflette l'ultimo valore campionato

(i segnali di ingresso non cambiano mai contemporaneamente).



# Grafo degli stati primitivo (modello di Moore)



# Tabella di flusso (modello di Mealy) e tabella triangolare

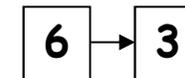
CD

	00	01	11	10
A	A,0	B,0	-, -	E,0
B	A,0	B,0	F,-	-, -
C	C,1	D,1	-, -	E,-
D	C,1	D,1	F,1	-, -
E	A,0	-, -	F,-	E,0
F	-, -	D,1	F,1	E,-

B					
C	x	x			
D	x	x			
E			x	x	
F	x	x			
	A	B	C	D	E

## Classi massime di compatibilità

{A, B, E}    {C, D, F}    {E, F}



**Teorema di Unger:**

{A, B, E}    {C, D, F}    ~~{E, F}~~



condizione di copertura

condizione di chiusura



# Tabella di flusso minima

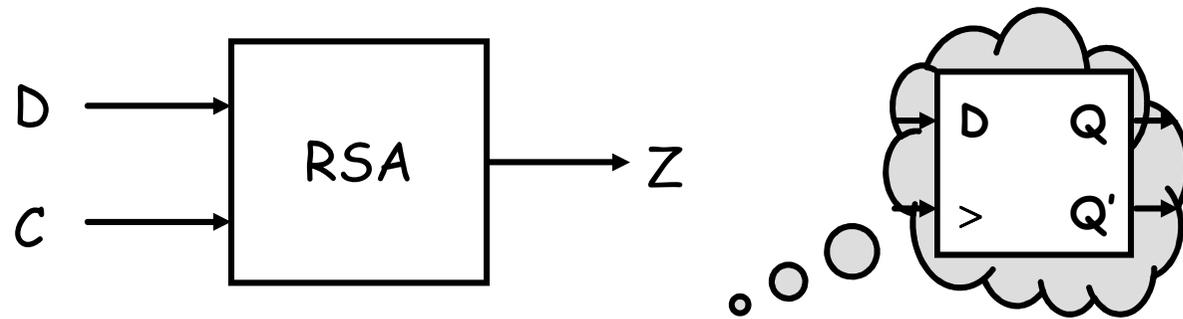
	CD			
	00	01	11	10
A	A,0	B,0	-, -	E,0
B	A,0	B,0	F,-	-, -
C	C,1	D,1	-, -	E,-
D	C,1	D,1	F,1	-, -
E	A,0	-, -	F,-	E,0
F	-, -	D,1	F,1	E,-



	CD			
	00	01	11	10
a	a,0	a,0	b,-	a,0
b	b,1	b,1	b,1	a,-

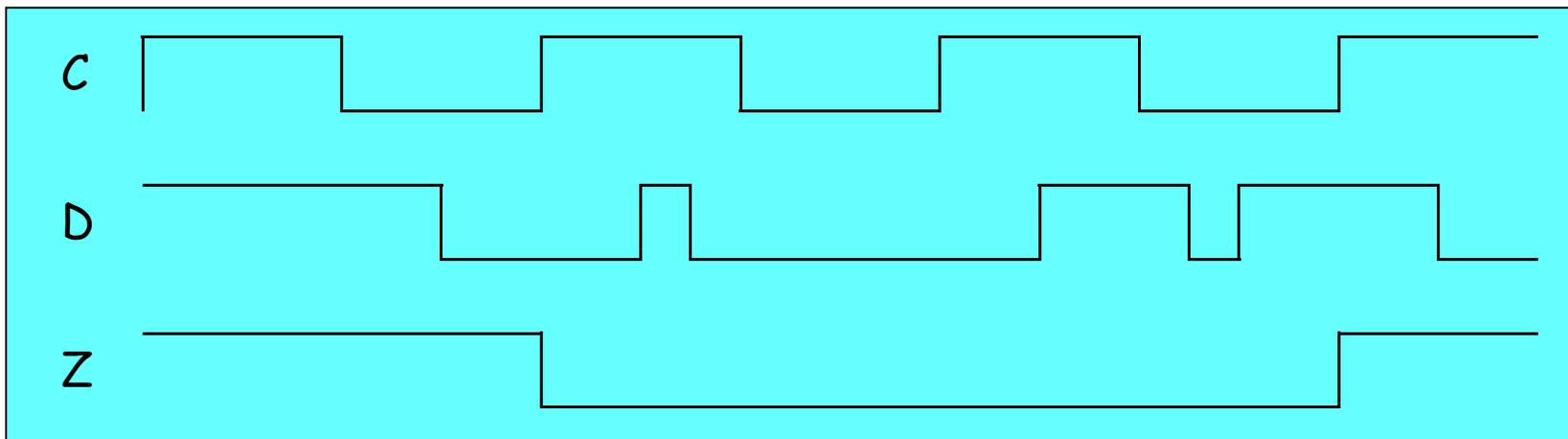
$a \equiv \{A, B, E\}$

$b \equiv \{C, D, F\}$

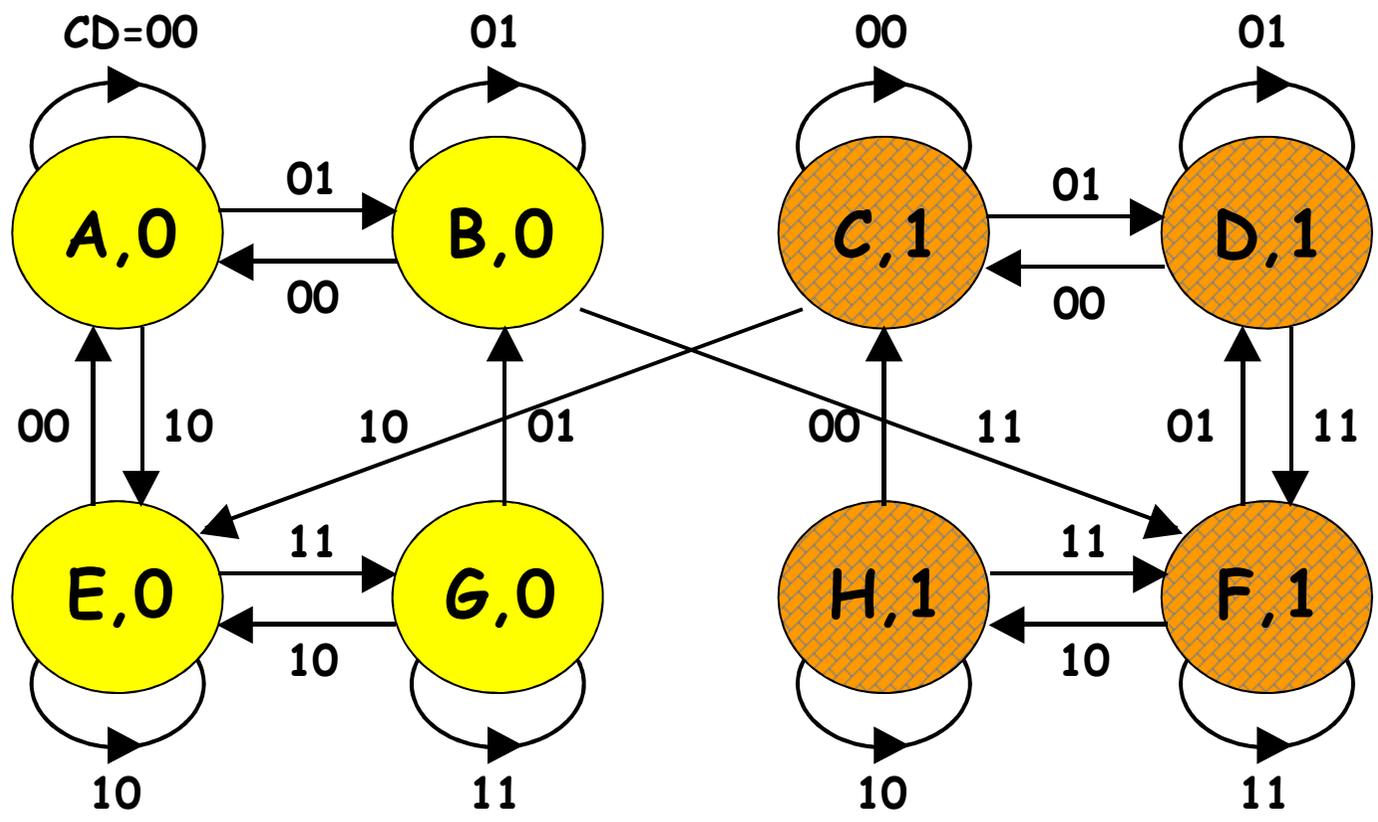


Comportamento:

$C$  svolge il ruolo di segnale di campionamento,  $D$  di segnale campionato.  
 Il campionamento ha luogo allorché  $C$  transita dal valore logico 0 al valore logico 1.  $Z$  riflette l'ultimo valore campionato (i segnali di ingresso non cambiano mai contemporaneamente).



# Grafo degli stati primitivo (modello di Moore)



# Tabella di flusso (modello di Mealy) e tabella triangolare

CD

	00	01	11	10
A	A,0	B,0	-, -	E,0
B	A,0	B,0	F, -	-, -
C	C,1	D,1	-, -	E, -
D	C,1	D,1	F,1	-, -
E	A,0	-, -	G,0	E,0
F	-, -	D,1	F,1	H,1
G	-, -	B,0	G,0	E,0
H	C,1	-, -	F,1	H,1

B							
C	x	x					
D	x	x					
E		FG	x	x			
F	x	x	EH		x		
G		FG	x	x		x	
H	x	x	EH		x		x
	A	B	C	D	E	F	G

## Classi massime di compatibilità

$a \equiv \{A, E, G\}$    
  $b \equiv \{A, B\}$    
  $c \equiv \{C, D\}$    
  $d \equiv \{D, F, H\}$



# Tabella di flusso minima

	CD			
	00	01	11	10
A	A,0	B,0	-, -	E,0
B	A,0	B,0	F,-	-, -
C	C,1	D,1	-, -	E,-
D	C,1	D,1	F,1	-, -
E	A,0	-, -	G,0	E,0
F	-, -	D,1	F,1	H,1
G	-, -	B,0	G,0	E,0
H	C,1	-, -	F,1	H,1



	CD			
	00	01	11	10
a	a/b,0	b,0	a,0	a,0
b	a/b,0	b,0	d,-	a,0
c	c,1	c/d,1	d,1	a,-
d	c,1	c/d,1	d,1	d,1

$a \equiv \{A, E, G\}$

$b \equiv \{A, B\}$

$c \equiv \{C, D\}$

$d \equiv \{D, F, H\}$

# Flip-Flop D Master-Slave

CD

	00	01	11	10
A	A,0	B,0	-, -	E,0
B	A,0	B,0	F,-	-, -
C	C,1	D,1	-, -	E,-
D	C,1	D,1	F,1	-, -
E	A,0	-, -	G,0	E,0
F	-, -	D,1	F,1	H,1
G	-, -	B,0	G,0	E,0
H	C,1	-, -	F,1	H,1

$\alpha \equiv \{A, E, G\}$

$\beta \equiv \{B\}$

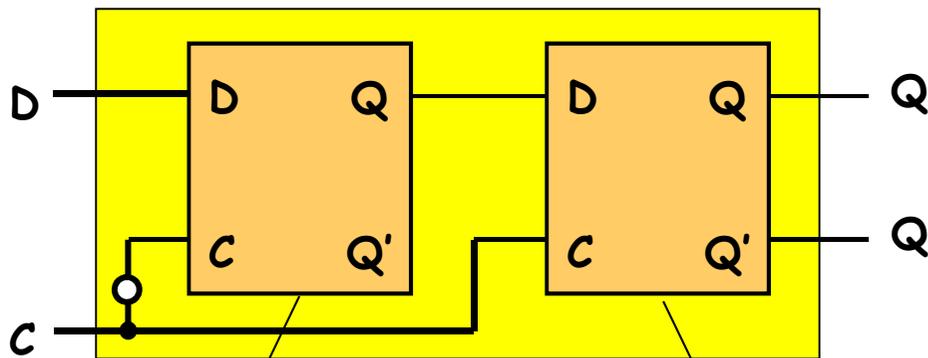
$\gamma \equiv \{C\}$

$\delta \equiv \{D, F, H\}$



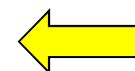
CD

	00	01	11	10
$\alpha$	$\alpha, 0$	$\beta, 0$	$\alpha, 0$	$\alpha, 0$
$\beta$	$\alpha, 0$	$\beta, 0$	$\delta, -$	-, -
$\gamma$	$\gamma, 1$	$\delta, 1$	-, -	$\alpha, -$
$\delta$	$\gamma, 1$	$\delta, 1$	$\delta, 1$	$\delta, 1$



D-Latch Master

D-Latch Slave



# Flip-Flop D Edge-Triggered

CD

	00	01	11	10
A	A,0	B,0	-, -	E,0
B	A,0	B,0	F,-	-, -
C	C,1	D,1	-, -	E,-
D	C,1	D,1	F,1	-, -
E	A,0	-, -	G,0	E,0
F	-, -	D,1	F,1	H,1
G	-, -	B,0	G,0	E,0
H	C,1	-, -	F,1	H,1

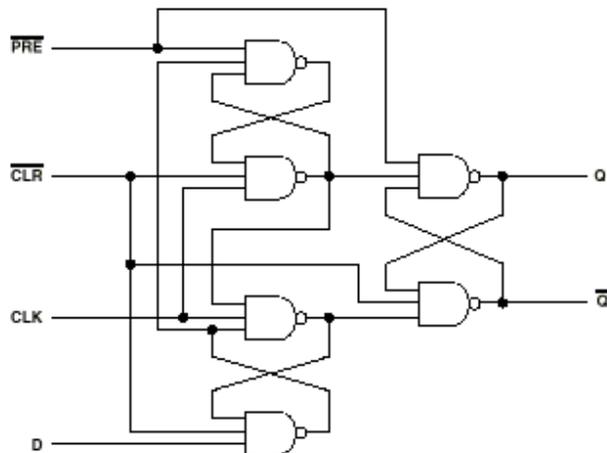
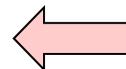
1 ≡ {A,B}    2 ≡ {E,G}

3 ≡ {C,D}    4 ≡ {F,H}



CD

	00	01	11	10
1	1,0	1,0	4,-	2,0
2	1,0	1,0	2,0	2,0
3	3,1	3,1	4,1	2,-
4	3,1	3,1	4,1	4,1



**comandi asincroni:**  
 Clear ( $CLR' = 0$ ) →  $Q = 0$   
 Preset ( $PRE' = 0$ ) →  $Q = 1$